

Versuchsanleitung M 1 : Dichte / Festkörper

1 Einleitung

Die Verteilung der Masse m im Volumen V eines festen Körpers ist i. Allg. nicht homogen. Zu ihrer Beschreibung wird der Quotient $\rho = \frac{dm}{dV}$ eingeführt und Massendichte (oder meist nur Dichte) genannt. Bedenkt man, dass

Festkörper Einschlüsse oder Poren enthalten können, so ist klar, dass sich in gleich großen Volumenelementen dV an verschiedenen Stellen eines Körpers nicht notwendig die gleiche Masse dm befinden muss. (Das Volumenelement dV ist dabei immer noch so groß, dass über die Inhomogenitäten der Massenverteilung im molekularen Bereich gemittelt wird.)

Die Dichte ist deshalb eine Funktion des betrachteten Ortes im Körper, d. h. $\rho = \rho(\vec{r})$. Für Körper mit homogener Massenverteilung gilt für die Dichte $\rho = \frac{m}{V}$, sie ist natürlich dann ortsunabhängig. Die Dichte ist eine wichtige Materialeigenschaft. Man benötigt sie z. B. zur Berechnung der Masse

$$m = \int_V \rho(\vec{r}) dV ,$$

des Massenträgheitsmomentes

$$J_A = \int_V \rho(\vec{r}) r^2 dV$$

oder der Wärmekapazität

$$C = \int_V c(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV .$$

Die Dichte ist temperatur- und druckabhängig. Bei Festkörpern kann die Druckabhängigkeit meist vernachlässigt werden. Für die Temperaturabhängigkeit gilt mit ρ_0 : Dichte bei 0 °C ; ϑ : Celsius-temperatur und α : linearer Wärmeausdehnungskoeffizient

$$\rho(\vartheta) = \frac{\rho_0}{1 + 3\alpha \vartheta} .$$

Die Dichte homogener fester Körper kann prinzipiell durch Wägung und Volumenbestimmung ermittelt werden. Die Massenbestimmung lässt sich mit einer Waage sehr genau ausführen. Nicht so die Volumenbestimmung (z.B. durch Ausmessen regelmäßiger Körper oder die Flüssigkeitsverdrängung unregelmäßig geformter Körper). Daher ist man bestrebt, die unmittelbare Bestimmung des Volumens, zu umgehen. Eine Möglichkeit dazu bietet die Verwendung eines Pyknometers.

2 Grundlagen

Ein Pyknometer ist ein Gefäß mit einem ganz bestimmten, unveränderlichen Innenvolumen, welches reproduzierbar mit großer Genauigkeit mit Flüssigkeit gefüllt werden kann. Das Pyknometer ist meist ein Glasgefäß mit einem Schliffstopfen. Es ist dann mit einer Flüssigkeit (meist Wasser) bekannter Dichte ρ_W vollständig gefüllt, wenn sich im Volumen keine Luftblasen befinden und die Flüssigkeit am oberen Ende der Kapillare des Stopfens eine Kuppe ausbildet. Das Messprinzip besteht darin, das Pyknometer mit unterschiedlichen Füllungen mehrmals zu wägen und aus den so bestimmten Massen die Dichte zu errechnen. Damit ist wie beabsichtigt die Dichtebestimmung auf (i. Allg. sehr genaue) Massenbestimmungen zurückgeführt. Eine zur Massenbestimmung verwendete elektronische Analysenwaage arbeitet nach dem Prinzip der elektromagnetischen Kompensation

(EMFC = electromagnetic force compensation). Die Gewichtskraft der aufgelegten Last wird dabei durch elektromagnetische Kräfte kompensiert, die vom Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule hervorgerufen werden. Mittels optoelektronischer Abtastung wird die Stellung der Waagschale sowie deren Heben und Senken bei Belastungsänderungen gemessen und mit diesem Signal wird der Kompensationsstrom in der Spule so gesteuert, dass die Waagschale wieder in die Null-Lage zurückgeführt wird. Dieser Kompensationsstrom ist der aufgelegten Last proportional und wird von der Elektronik der Waage in die auf dem Waagendisplay angezeigte Masse umgerechnet.

Zur Bestimmung der Dichte eines Festkörpers unter Verwendung eines Pyknometers sind drei Wägungen mit einer Analysenwaage nötig, wobei jeweils der Auftrieb der zu wägenden Körper in Luft zu berücksichtigen ist.

Bei der Wägung der Probe (Masse m , Volumen V) wird die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ durch die ihr entgegengesetzt gerichtete Auftriebskraft $F_A = V \cdot \rho_L \cdot g$ vermindert (ρ_L : Dichte der Luft). Im Gleichgewicht zeigt deshalb die Waage den Wert m' an

$$m' = m - V \rho_L \quad (2-1)$$

Bezeichnet man das äußere Volumen des Pyknometers mit V_p , so ist bei den Wägungen des Pyknometers jeweils eine vom Luftauftrieb verursachte Auftriebskraft von $V_p \cdot \rho_L \cdot g$ zu berücksichtigen. Bei der Wägung des nur mit Wasser gefüllten Pyknometers (Masse m_1) zeigt die Waage somit den Wert m'_1 an

$$m'_1 = m_1 - V_p \rho_L \quad (2-2)$$

Die Wägung des mit dem zu untersuchenden festen Körper der Masse m und Wasser gefüllten Pyknometers (Masse m_2) führt zum Messergebnis m'_2

$$m'_2 = m_2 - V_p \rho_L \quad (2-3)$$

Zwischen den Massen m , m_1 und m_2 und dem Volumen V des zu untersuchenden Festkörpers besteht der Zusammenhang

$$m - V \rho_W = m_2 - m_1 \quad (2-4)$$

Unter Berücksichtigung von (2-2) und (2-3) erhält man aus (2-4)

$$m - V \rho_W = m'_2 - m'_1 \quad (2-5)$$

Die Gleichungen (2-1) und (2-5) sind zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Größen m und V . Mit $\rho = \frac{m}{V}$ erhält man die Dichte des zu untersuchenden Körpers als

$$\rho = \frac{m' \rho_W - (m'_2 - m'_1) \rho_L}{m' + m'_1 - m'_2} \quad (2-6)$$

Wegen des relativ großen Unterschiedes der Dichten von Wasser und Luft kann Gleichung (2-6) in einen Hauptterm und einen den Luftauftrieb berücksichtigenden Korrekturterm zerlegt werden

$$\rho = \frac{m' \rho_W}{m' + m'_1 - m'_2} - \underbrace{\frac{(m'_2 - m'_1) \rho_L}{m' + m'_1 - m'_2}}_{\substack{\text{Berücksichtigung} \\ \text{des Luftauftriebes} \\ \text{(Luftauftriebsterm)}}} \quad (2-7)$$

Eine solche Zerlegung in Haupt- und Korrekturterm kann sinnvoll sein, um den Einfluß des Luftauftriebs auf das Ergebnis der Berechnung der Dichte zu beurteilen bzw. abzuschätzen.

Zur Berechnung der Dichte ρ nach Gleichung (2-6) ist die Kenntnis der Dichte der Luft ρ_L erforderlich. Die Dichte der Luft variiert deutlich mit Temperatur und Luftdruck, ist aber für Normbedingungen ($\vartheta_n = 0^\circ\text{C}$ und $p_n = 101,3\text{ kPa}$) bekannt ($\rho_n = 1,293\text{ kg/m}^3$). Damit ergeben sich zwei Möglichkeiten, die Dichte der Luft aus der im Versuch zu messenden Raumtemperatur ϑ und dem ebenfalls zu messenden Luftdruck p_L zu berechnen. Entweder man verwendet die für die Raumluft in guter Näherung gültige Zustandsgleichung des idealen Gases

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \quad , \quad (2-8)$$

erhält daraus mit $V = \frac{m}{\rho}$ für $m = \text{const.}$ zunächst

$$\frac{p_L \cdot m}{T_L \cdot \rho_L} = \frac{p_n \cdot m}{T_n \cdot \rho_n} \quad (2-9)$$

und stellt dann Gleichung (2-9) unter Berücksichtigung von $T_L = (\vartheta + 273,15)\text{ K}$ und $T_n = (\vartheta_n + 273,15)\text{ K}$ nach der gesuchten Größe ρ_L um.

Oder man verwendet die Zustandsgleichung des idealen Gases in der Form

$$p \cdot V = m \cdot R_i \cdot T \quad , \quad (2-10)$$

verwendet darin als individuelle (spezifische) Gaskonstante R_i diejenige der Luft, also $R_L = 287\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ und stellt Gleichung (2-10) nach $\rho_L = \frac{m}{V}$ um.

3 Versuchsanordnung

Zur Versuchsanordnung gehören das Pyknometer, eine elektronische Analysenwaage und Zubehör wie Wasserflasche, Pinzette u. a. m.. Den zu untersuchenden Körper wägen wir zunächst in einem Wägegefäß auf der Waage und bestimmen m' . Anschließend wird das Pyknometer mit Wasser gefüllt. Es ist darauf zu achten, dass sich vor dem Einsetzen des Glasstopfens keine Luftblasen im Inneren des Glaskolbens befinden. Das gefüllte Pyknometer ist außen sorgfältig abzutrocknen. Um eine unerwünschte Erwärmung des Wassers zu vermeiden, fasse man das Pyknometer nur am Hals an. Die Wägung des wassergefüllten Pyknometers liefert m'_1 . Anschließend bringt man die feste Substanz mit Hilfe einer Pinzette in das Pyknometer. Es ist wieder darauf zu achten, dass vor dem Einsetzen des Glasstopfens alle Luftblasen aus dem Wasser entwichen sind und das Pyknometer gut abgetrocknet wird. Durch erneute Wägung des Pyknometers (jetzt mit Wasser und der Probensubstanz gefüllt) ermittelt man schließlich die Masse m'_2 .

Die Wägungen des Pyknometers zur Bestimmung von m'_1 und m'_2 sind jeweils dreimal auszuführen, wobei das Pyknometer für jede einzelne Wägung stets erneut zu befüllen ist.

4 Aufgaben

In diesem Abschnitt werden die zu bearbeitenden Aufgaben nur grundsätzlich aufgeführt. Genauere Hinweise zur Versuchsdurchführung befinden sich am Arbeitsplatz.

- 4.1 Bestimmung der Masse m' des zu untersuchenden festen Körpers.
- 4.2 Bestimmung der Masse m'_1 des Pyknometers (mit Wasser gefüllt).
- 4.3 Bestimmung der Masse m'_2 des Pyknometers (mit Wasser und der Probensubstanz gefüllt).
- 4.4 Mit den Ergebnissen der Aufgaben 4.1, 4.2 und 4.3 ist nach (2-6) die Dichte der Probensubstanz zu bestimmen. Aus den Fehlern von m' , m'_1 , m'_2 und ρ_W berechne man den Fehler von ρ .
- 4.5 Schätzen Sie den Einfluss des Luftauftriebes auf die Berechnung der Dichte nach Gleichung (2-7) ab und entscheiden Sie, ob der Luftauftriebsterm in (2-7) bei weiteren Messungen vernachlässigt werden könnte.

5 Fragen

- 5.1 Wie ist die Dichte eines inhomogenen Stoffes definiert? Welche Bedeutung hat in diesem Fall der Quotient $\frac{m}{V}$?
- 5.2 Ein Körper taucht mit seinem Volumen V vollständig in ein Gas bekannter Dichte ρ_G . Geben Sie Betrag, Richtung und Angriffspunkt a) der Auftriebskraft und b) der Gewichtskraft des Körpers an.
- 5.3 Eine Legierung hat die Dichte 14250 kg/m^3 . Geben Sie diese Dichte sowohl in g/cm^3 als auch in kg/dm^3 an.
- 5.4 Sind die Masse und das Gewicht eines Körpers am Äquator, am Nordpol oder auf dem Mond gleich groß ?
- 5.5 Ein Draht aus Messing (Dichte $8,22 \text{ g/cm}^3$) hat einen Durchmesser von $1,14 \text{ mm}$ und ist 147 m lang. Wie groß ist die Masse des Drahtes?
- 5.6 Warum ist es im Experiment nicht erforderlich, die Masse des leeren Pyknometers zu bestimmen und warum sollte bei der Versuchsdurchführung eine (unbeabsichtigte) Erwärmung des Pyknometers unbedingt vermieden werden?
- 5.7 Bei 0°C und $101,3 \text{ kPa}$ hat Luft die Dichte $1,293 \text{ kg/m}^3$. Wie groß ist ihre Dichte bei 25°C und $102,4 \text{ kPa}$?
- 5.8 Ohne Luftauftriebskorrektur berechnet man die Dichte der Probesubstanz als $\rho = \frac{m' \rho_W}{m' + m'_1 - m'_2}$.
Entwickeln Sie für ρ eine Fehlerformel, wenn alle Größen in der Gleichung fehlerbehaftet sind.
- 5.9 In welcher Weise nimmt die Temperatur auf die Dichte eines Festkörpers Einfluss?
- 5.10 Die Dichte eines inhomogenen Körpers ist ortsabhängig. Wie berechnen Sie bei bekannter Gestalt die Masse des Körpers?

Literatur

- [1] Schenk/Kremer (Hrsg.) : Physikalisches Praktikum
Springer Spektrum, Heidelberg, Wiesbaden, 2014 (14. Auflage)
ISBN : 978-3-658-00665-5 (Softcover) / 978-3-658-00666-2 (eBook)
- [2] Hering, E. u.a. : Physik für Ingenieure
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2021 (13. Auflage)
ISBN : 978-3-662-63176-8 (Hardcover) / 978-3-662-63177-5 (eBook)