Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig
Mathematisch-Naturwissenschaftliches Zentrum (MNZ)
Physikalisches Praktikum

Versuchsanleitung S 7 : Federpendel

1 Einleitung

Die Rotation eines starren Körpers um eine raum- und körperfeste Drehachse A verdient wegen ihrer zahlreichen technischen Anwendungen (Motoranker, Räder, Schwungmassen, Wellen ...) besonderes Interesse.
Die Drehwinkel-Zeit-Funktion $\varphi(t)$ - und damit der Bewegungsablauf - wird bei o. g. Rotation bestimmt durch:

- J_A : das Massenträgheitsmoment des starren Körpers bezüglich der Achse A
- M_A : das Drehmoment bezüglich der Achse A

und die Anfangsbedingungen $\varphi(t=0)$ und $\dot{\varphi}(t=0)$.
Der Größe M_A gilt das besondere Anliegen des Versuches.
An einem ausgewählten starren Körper - einem Federpendel - wird der Einfluss mehrerer Kräfte und des von ihnen bewirkten M_A auf den Bewegungsablauf untersucht.
Das Federpendel vollführt dabei eine periodische Bewegung. Durch die Messung der Schwingungsdauer T lässt sich an dieser der Zeitablauf leichter erfassen als bei anderen, nichtperiodischen Rotationsbewegungen.

2 Grundlagen

Der starre Körper sei um eine feste Achse A drehbar gelagert und besitze bezüglich dieser das Massenträgheitsmoment J_A. Ein Einheitsvektor $\vec{e}_\mathrm{A}$ gibt die Achsenrichtung an, er bildet mit dem positiven Zählsinn des Drehwinkels φ eine Rechtsschraube. An dem starren Körper können beliebig viele Drehmomente $\vec{M}_\mathrm{i}$ angreifen, ihre Summe

$$\vec{M} = \sum_\mathrm{i} \vec{M}_\mathrm{i} \qquad (2-1)$$

nennt man das (resultierende) Drehmoment.
Für die Rotation um A ist $\vec{M}$ nur mit M_A - seiner Koordinate in Achsenrichtung - wirksam. Man erhält sie durch die Projektion von $\vec{M}$ auf $\vec{e}_\mathrm{A}$ als

$$M_\mathrm{A} = \vec{M} \cdot \vec{e}_\mathrm{A} = \left(\sum_\mathrm{i} \vec{M}_\mathrm{i} \right) \cdot \vec{e}_\mathrm{A} = \sum_\mathrm{i} \left(\vec{M}_\mathrm{i} \cdot \vec{e}_\mathrm{A} \right) \ . \qquad (2-2)$$

Die Koordinate (bzw. das Skalarprodukt) M_A ist eine vorzeichenbehaftete skalare Größe - also weder ein Vektor noch der Betrag eines solchen.
In der Bewegungsgleichung der Rotation um die feste Achse

$$J_\mathrm{A} \, \ddot{\varphi} \qquad (2-3)$$

kann M_A vom Winkel φ, der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und auch explizit von der Zeit t abhängen.
Die Gleichung (2 - 3) ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\varphi(t)$. Löst man sie mit geeigneten mathematischen Methoden, so liegt mit $\varphi(t)$ die vollständige Beschreibung des Bewegungsablaufes vor.
Gegebenenfalls zu $\vec{e}_\mathrm{A}$ senkrechte Komponenten von $\vec{M}$ tragen zur Bewegung um A nichts bei. Sie belasten die Achslager und werden durch Zwangs- oder Stützmomente kompensiert.

3 Versuchsanordnung

Das Federpendel besteht aus einem Stab der Masse m', an dessen unterem Ende ein Zylinder der Masse m'' angebracht ist (vgl. Bild 1).

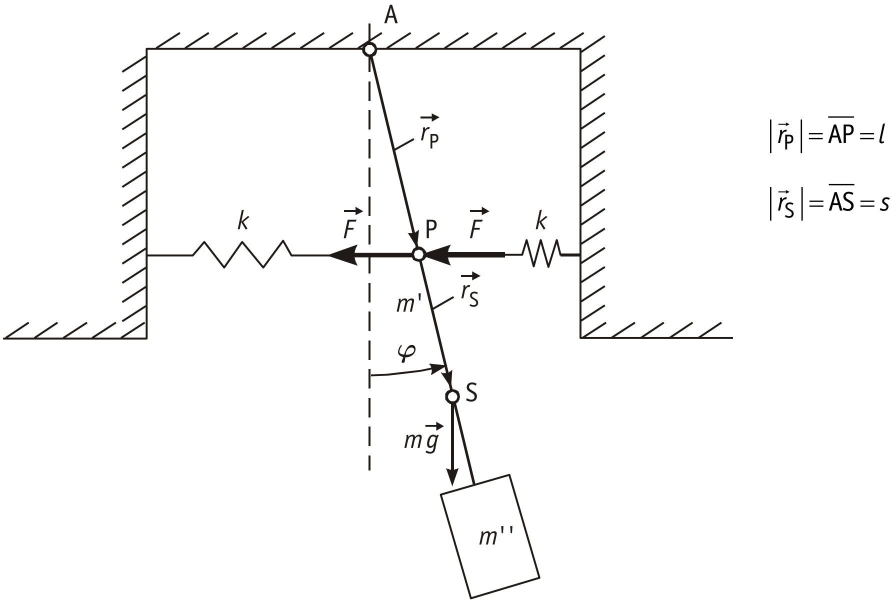

Bild 1 Federpendel

Der Schwerpunkt S der Gesamtmasse $m = m' + m''$ liegt am Ort $\vec{r}_S$ im Abstand s von der Drehachse A. Das obere Ende des Stabes ist an einem Rahmen so gelagert, dass sich das Federpendel um A drehen kann.
Im Punkt P am Ort $\vec{r}_p$ - dessen Abstand l zu A variiert werden kann - greifen zwei Federn der Federkonstanten k an. Neben der Gewichtskraft $m\vec{g}$ wirken die beiden gleichgroßen Federkräfte $\vec{F}$ sowie Luft- und Lagerreibungskräfte auf das Pendel ein. Diese Kräfte liegen alle in der Zeichenebene. Der Einheitsvektor $\vec{e}_A$ steht auf der Zeichenebene senkrecht und weist zum Betrachter.
Bei einer Auslenkung des Pendels um φ (vgl. Bild 1) bewirkt die Gewichtskraft das Moment

$$\vec{M}_G = \vec{r}_S \times m\vec{g} = -\vec{e}_A\, s\, m\, g \sin\varphi \quad . \qquad (3-1)$$

Hält man die Ausschläge klein, kann in (3 - 1) die Sinusfunktion durch ihr Argument φ genähert werden und es folgt

$$\vec{M}_G = -\vec{e}_A\, m\, g\, s\, \varphi \quad . \qquad (3-2)$$

Bei den erwähnten kleinen Ausschlägen des Pendels kann die Bewegung des Punktes P näherungsweise als horizontal und geradlinig angesehen werden.
Die linke Feder wird so um $l\varphi$ gedehnt und die rechte um $l\varphi$ zusammengedrückt. Das von beiden Federn gemeinsam bewirkte Moment ist

$$\vec{M}_F = \vec{r}_p \times 2\vec{F} = -\vec{e}_A\, l\, 2\, k\,(l\,\varphi) = -\vec{e}_A\, 2\, k\, l^2 \varphi \quad . \qquad (3-3)$$

Für das Reibungsmoment wird summarisch der Ansatz

$$\vec{M}_R = -\vec{e}_A\, R\, \dot{\varphi} \qquad (3-4)$$

gemacht. Es wirkt stets bewegungshemmend und ist dem Betrage nach mit dem Faktor R (näherungsweise) dem Betrag der Winkelgeschwindigkeit proportional.

Durch Projektion des resultierenden Momentes $\vec{M} = \vec{M}_G + \vec{M}_F + \vec{M}_R$ auf die Achsenrichtung erhält man mit (3 - 2) bis (3 - 4)

$$M_A = \vec{M}\,\vec{e}_A \quad \left(\dots g s + 2 k l^2 \right) \varphi - R\dot{\varphi} \quad . \tag{3 – 5}$$

Die Bewegungsgleichung (2 – 2) wird damit zu

$$\ddot{\varphi} + \frac{R}{J_A}\dot{\varphi} + \frac{m\,g\,s + 2k\,l^2}{J_A}\varphi = \ddot{\varphi} + 2\delta\,\dot{\varphi} + \omega_0^2\,\varphi = 0 \tag{3 – 6}$$

und besitzt - wie man durch Einsetzen überprüfen kann - die Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0\, e^{-\delta t} \sin(\omega t + \alpha) \quad . \tag{3 – 7}$$

Das ist die Winkel-Zeit-Funktion einer gedämpften Drehschwingung mit der Amplitude φ_0 und dem Nullphasenwinkel α, der Abklingkonstanten $\delta = \dfrac{R}{2J_A}$ und der Kreisfrequenz ω.

Es gilt dabei

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \quad . \tag{3 – 8}$$

Ist die Dämpfung schwach ($\delta^2 \ll \omega^2$) , so gilt annähernd

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 = \frac{m\,g\,s + 2k\,l^2}{J_A} \quad . \tag{3 – 9}$$

Misst man nun die Schwingungsdauer T des Federpendels in Abhängigkeit von l und stellt $\dfrac{1}{T^2}$ als Funktion von l^2 dar, so erhält man wegen (3 – 9) die Gerade

$$\frac{1}{T^2} = \frac{m g s}{4\pi^2 J_A} + \frac{k}{2\pi^2 J_A} l^2 \quad , \tag{3 – 10}$$

aus deren Anstieg und Absolutglied man z. B. bei bekanntem m und J_A die Federkonstante k und den Schwerpunktabstand s bestimmen kann.

Um die Abklingkonstante δ zu bestimmen, zeichnet man z. B. die Funktion $\varphi(t)$ oder die (bei kleinen Ausschlägen) dazu proportionale Horizontalauslenkung $y(t)$ des Pendels auf. Dabei müssen nach (3 - 7) die aufeinanderfolgenden Maximalauslenkungen auf der einhüllenden Exponentialfunktion $e^{-\delta t}$ liegen. Eine an $y(t)$ mit dem Computer durchgeführte Kurvenanpassung für die einhüllenden Exponentialfunktion liefert die Parameter dieser Funktion aus denen dann die Abklingkonstante δ berechnet werden kann.
Mit dem so bestimmten δ- Wert kann die Gültigkeit der Näherungsformel (3 - 9) im Experiment nachgewiesen werden.

4 Aufgaben

In diesem Abschnitt werden die zu bearbeitenden Aufgaben nur grundsätzlich aufgeführt.
Genauere Hinweise zur Versuchsdurchführung befinden sich am Arbeitsplatz.

4.1 Man messe für verschiedene Federangriffspunkte P die Schwingungsdauern des Federpendels.

4.2 Aus der graphischen Darstellung $\frac{1}{T^2} = f(l^2)$ bestimme man bei gegebenen J_A und m die Federkonstante k und den Schwerpunktabstand s.

4.3 Man zeichne mittels eines Bewegungsaufnehmers die Zeitfunktion $y(t)$ auf und schätze daraus die Abklingkonstante δ ab. Das Pendel dabei ohne Federn schwingen lassen.

4.4 Man zeige, dass δ^2 vernachlässigbar klein gegen ω^2 ist.

5 Fragen

5.1 Geben Sie die Definitionsgleichung des Massenträgheitsmomentes J_A bezüglich der festen Achse A an (mit Skizze).

5.2 Eine Kraft $\vec{F}$ greift im Punkte P (Ortsvektor $\vec{r}_p$) an. Schreiben Sie den Drehmomentenvektor der Kraft $\vec{F}$ bezüglich eines Drehpunktes D (Ortsvektor $\vec{r}_D$) auf und fertigen Sie dazu eine Skizze an.

5.3 Welche Beziehungen bestehen zwischen der Schwingungsdauer, der Frequenz und der Kreisfrequenz einer Schwingung?

5.4 Die Bewegungsgleichung des ungedämpften Federpendels lautet $\ddot{\varphi} + \frac{m\,g\,s + 2k\,l^2}{J_A}\varphi = 0$.

Geben Sie seine Frequenz f an.

5.5 Wie lautet das dynamische Grundgesetz für die Rotation des starren Körpers um eine feste Achse A (mit Skizze)?

5.6 Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$ ist.

5.7 Erläutern Sie den Begriff "raum- und körperfeste Achse".

5.8 Leiten Sie für $s = \frac{a_0\, J_A\, 4\pi^2}{m\,g}$ eine Fehlerformel her, wenn a_0, J_A, m und g fehlerbehaftet sind.

5.9 Geben Sie drei Maßeinheiten für das Drehmoment an. Welche anderen physikalischen Größen werden auch in diesen Einheiten gemessen?

5.10 Welchen relativen Fehler begeht man durch die Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$ für $\varphi = 5°$?

Literatur

[1] Schenk/Kremer (Hrsg.) : Physikalisches Praktikum
Springer Spektrum, Heidelberg, Wiesbaden, 2014 (14. Auflage)
ISBN : 978-3-658-00665-5 (Softcover) / 978-3-658-00666-2 (eBook)

[2] Hering, E. u.a. : Physik für Ingenieure
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012 (11. Auflage)
ISBN : 978-3-642-22568-0 (Hardcover) / 978-3-642-22569-7 (eBook)