Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig
Mathematisch-Naturwissenschaftliches Zentrum (MNZ)
Physikalisches Praktikum

Versuchsanleitung S 2 : Torsionsschwingungen

1 Einleitung

Die Rotation eines Körpers um eine raum- und körperfeste Drehachse ist eine technisch häufig genutzte Bewegung (Motoranker, Wellen, Schwungscheiben, Zahnräder u. a. m.).
Rufen die einwirkenden Kräfte und Momente an einem Körper lediglich Verformungen von vernachlässigbarer Größe hervor, so kann der Körper als starr angesehen werden.
Bei der Rotation des starren Körpers hat das Massenträgheitsmoment J_{A} Einfluss auf den Bewegungsablauf. Motoren, die rasche Drehzahländerungen ermöglichen sollen, sollten Anker mit möglichst kleinen Massenträgheitsmomenten besitzen. Dagegen werden Schwungscheiben, die den Einfluss von Schwankungen des Antriebsmomentes auf die Drehzahl reduzieren sollen, mit großen Massenträgheitsmomenten ausgestattet.
Die Massenträgheitsmomente geometrisch einfacher Körper (Kreiszylinder o. Ä.) können definitionsgemäß berechnet werden. Hat man hingegen das Massenträgheitsmoment eines komplizierter aufgebauten Körpers (z. B. eines Motorankers) zu bestimmen, so wird dies nur auf experimentellem Wege möglich sein. Man untersucht dazu eine Drehschwingung, weil sie in der Schwingungsdauer T eine gut messbare kinematische Größe besitzt. Sind die Verformungen des Körpers nicht mehr vernachlässigbar, so versagt das Modell "Starrer Körper". Halten sich die Verformungen in gewissen Grenzen und gehen bei Entlastung des Körpers wieder vollständig zurück, so nennen wir den Körper elastisch. Verwendet man einen elastisch verdrillten Körper um eine Drehschwingung eines anderen, starren Körpers zu realisieren, so spricht man von einer Torsionsschwingung des starren Körpers.

2 Grundlagen

Auf einen starren Körper (Trägheitsmoment J_{A}) , der nur um eine feste Achse A (Richtung $\vec{e}_{\mathrm{A}}$) rotieren kann, wirke das Drehmoment $\vec{M}$. Für die Drehbewegung um A ist nur die Koordinate $M_{\mathrm{A}} = \vec{M}\,\vec{e}_{\mathrm{A}}$ des Drehmomentes in Achsenrichtung von Bedeutung.
Das Drehmoment (eigentlich die Drehmomentenkoordinate) M_{A} dreht im Zeitelement $\mathrm{d}t$ den Körper um $\mathrm{d}\varphi$ und verrichtet die differentielle Arbeit

$$\mathrm{d}W = M_{\mathrm{A}}\,\mathrm{d}\varphi = M_{\mathrm{A}}\,\dot{\varphi}\,\mathrm{d}t \qquad (2-1)$$

an ihm, wobei φ die Ortskoordinate (Drehwinkel) und $\dot{\varphi}$ die Winkelgeschwindigkeit sind.
Diese Arbeit $\mathrm{d}W$ bewirkt eine Änderung $\mathrm{d}W_{\mathrm{R}}$ der Rotationsenergie. Es gilt

$$\mathrm{d}W = M_{\mathrm{A}}\,\dot{\varphi}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}W_{\mathrm{R}} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} = M_{\mathrm{A}}\,\dot{\varphi} \quad . \qquad (2-2)$$

Die Bewegungsgleichung für die Rotation um die feste Achse folgt aus (2 - 2) mit $W_{\mathrm{R}} = \frac{J_{\mathrm{A}}}{2}\dot{\varphi}^2$ und lautet allgemein

$$J_{\mathrm{A}}\,\ddot{\varphi} = M_{\mathrm{A}} \quad . \qquad (2-3)$$

Speziell bei der Torsionsschwingung wirkt das Moment der Schubspannungen

$$M_{\mathrm{S}} = \frac{\pi\,G\,r_0{}^4}{2\,l}\,\varphi = D\,\varphi \quad . \qquad (2-4)$$

Es entsteht beim Schwingen im elastisch verformten Torsionsdraht und ist dem Drehwinkel φ proportional. Der Proportionalitätsfaktor D heißt Direktionsmoment (des Torsionsdrahtes). Bei einem Kreisquerschnitt hängt D entsprechend (2 - 4) von den geometrischen Abmessungen (Radius r_0 , Länge l) und den Materialeigenschaften

(G : Schubmodul oder Torsionsmodul) des Torsionsdrahtes ab. Mit (2 - 4) folgt aus (2 - 3) die Bewegungsgleichung

$$J_A \ddot{\varphi} = -D\varphi \qquad (2-5)$$

des Torsionsschwingers. Das negative Vorzeichen steht für den rücktreibenden Charakter des Drehmomentes. Zur Herleitung von (2 - 4) siehe folgenden Anhang.

2a Anhang (fakultativ, soweit nicht anders festgelegt)

Die als Torsion bezeichnete Verdrehung eines elastischen Körpers soll am Beispiel eines Kreiszylinders (Stab, Draht) untersucht werden. In Bild 1 ist der Querschnitt B fest eingespannt, am anderen Ende des Zylinders (am Querschnitt B') greift das Torsionsmoment $\vec{M}$ (hier durch das Kräftepaar $\vec{F}$, $-\vec{F}$ bewirkt) an.

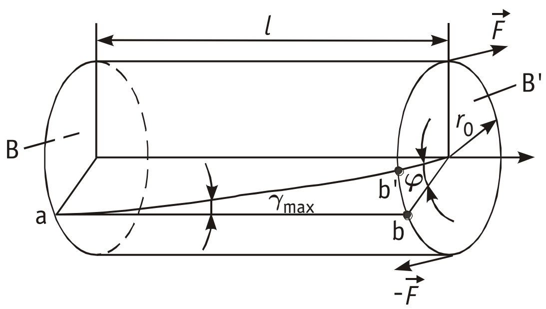

Bild 1 Torsionsstab

Der Querschnitt B' wird dadurch um den Winkel φ gegen B verdreht. Die Mantellinie a - b des Zylinders geht in die Schraublinie a – b' über. Die Verformung wird durch den Scherungswinkel γ beschrieben, der an der Mantelfläche des Zylinders seinen Maximalwert γ_{max} erreicht. In Bild 1 findet man auf dem Zylindermantel und dementsprechend im Inneren (beim Radius r) die Beziehungen

$$l\,\gamma_{max} = r_0\,\varphi \quad \text{bzw.} \quad l\,\gamma = r\,\varphi \ . \qquad (2a-1)$$

Durch die Verdrehung der Querschnitte werden die Teilchen des Materials gegeneinander verschoben und elastische Kräfte hervorgerufen.
Im Flächenelement $\mathrm{d}A$ (Bild 2) soll die tangentiale Kraft $\mathrm{d}\vec{F}_S$ wirken, die mit der Schubspannung τ durch

$$\mathrm{d}F_S = \tau\,\mathrm{d}A \qquad (2a-2)$$

verbunden ist.

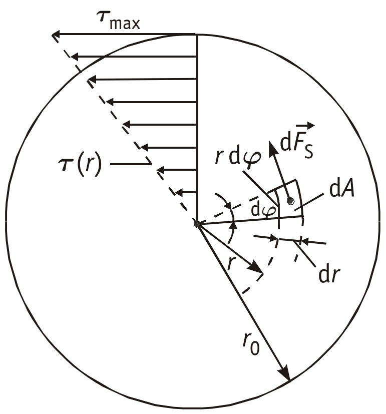

Bild 2 Schubspannungen im Stabquerschnitt

Die Schubspannungen τ sind den Verformungen γ proportional, der Proportionalitätsfaktor $G = \frac{\tau}{\gamma}$ ist eine Materialkonstante und heißt Schubmodul oder Torsionsmodul. Die Schubspannungen genügen entsprechend (2a - 1) der Verteilung

$$\tau(r) = \frac{r}{r_0}\,\tau_{\max} \quad . \tag{2a – 3}$$

Die Schubspannungen bewirken ein Schubspannungsmoment M_S, das dem Torsionsmoment entgegenwirkt. Das Flächenelement $\mathrm{d}A$ (Bild 2) leistet zum Schubspannungsmoment den Beitrag

$$\mathrm{d}M_S = r\,\mathrm{d}F_S = r\,\tau(r)\,\mathrm{d}A \quad . \tag{2a – 4}$$

Das gesamte Schubspannungsmoment erhält man durch Integration von (2a - 4) über die Querschnittsfläche B' und unter Verwendung von (2a - 3) als

$$M_S = \frac{\tau_{\max}}{r_0}\int\limits_{B'} r^2\,\mathrm{d}A \quad . \tag{2a – 5}$$

Das Integral in (2a - 5) heißt polares Flächenträgheitsmoment J_p. Für einen Kreisquerschnitt findet man mit $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$ (Polarkoordinaten, vgl. Bild 2)

$$J_p = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_{r=0}^{r_0} r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}r_0^4 \quad . \tag{2a – 6}$$

Damit erhält man aus (2a - 5) mit $\tau_{\max} = G\,\gamma_{\max}$ und (2a - 1) für das Schubspannungsmoment schließlich (2 - 4).

3 Versuchsanordnung

Zur dynamischen Bestimmung eines Massenträgheitsmomentes (sowie des Direktionsmomentes und des Torsionsmoduls eines Torsionsdrahtes) ist das obere Ende des Torsionsdrahtes (Länge l, Radius r_0) fest eingespannt, an seinem unteren Ende ist der zu untersuchende Körper (Massenträgheitsmoment J_A) befestigt. Die Messung der Schwingungsdauer erfolgt durch Lichtschranke und Zähler. Das Licht wird an einem am Torsionsdraht befestigten Spiegel reflektiert.
Die Bewegungsgleichung (2 - 5) wird nach Division durch J_A zu

$$\ddot{\varphi} + \frac{D}{J_A}\varphi = 0 \quad . \tag{3 – 1}$$

Das ist die Bewegungsgleichung eines linearen harmonischen Oszillators der Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J_A}}$. Die Schwingungsdauer des Systems ist demnach

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{D}} \quad . \tag{3 – 2}$$

Um mit Hilfe der gemessenen Schwingungsdauer T das Trägheitsmoment J_A nach (3 - 2) zu bestimmen, müsste man D kennen. Sicherlich kann D aus G, r_0 und l berechnet werden, der Fehler wird dabei aber i. Allg. recht groß sein. Man wählt daher einen anderen Weg, der die Kenntnis von D für die Bestimmung von J_A nicht voraussetzt.
Bringt man am Torsionsdraht zusätzlich zu dem zu untersuchenden Körper (J_A) einen zweiten Körper mit bekanntem Trägheitsmoment J_{ZA} (z. B. einen Kreiszylinder) an, so ist das gesamte Trägheitsmoment die Summe von J_A und J_{ZA}. Die Schwingungsdauer vergrößert sich dadurch auf

$$T_Z = 2\pi\sqrt{\frac{J_A + J_{ZA}}{D}} \quad . \tag{3 – 3}$$

Man misst nun beide Schwingungsdauern T und T_Z und berechnet das Trägheitsmoment J_A als

$$J_A = J_{ZA}\,\frac{T^2}{T_Z^2 - T^2} \quad . \tag{3 – 4}$$

Für Direktionsmoment D und Torsionsmodul G findet man mit (3 – 4) , (3 – 2) und (2 – 4)

$$D = \frac{4\pi^2 J_{ZA}}{T_Z^2 - T^2} \qquad \text{bzw.} \qquad G = \frac{8\pi l J_{ZA}}{r_0^4 \left(T_Z^2 - T^2\right)} \quad . \tag{3 – 5}$$

4 Aufgaben

In diesem Abschnitt werden die zu bearbeitenden Aufgaben nur grundsätzlich aufgeführt.
Genauere Hinweise zur Versuchsdurchführung befinden sich am Arbeitsplatz.

4.1 Man berechne das Massenträgheitsmoment eines Kreiszylinders um seine Rotationsachse. Dazu sind Radius R und Masse m des Zylinders zu messen.

4.2 Die Schwingungsdauern T und T_Z sind mehrmals zu messen.

Hinweis : Bitte schauen Sie zur Vorbereitung auf den Versuch unbedingt in der Bedienungsanleitung Ihres Taschenrechners nach, wie Sie unter Benutzung der in den Taschenrechner integrierten Statistikfunktionen zu einer Anzahl von Messwerten x_1 , x_2 , ... , x_n den Mittelwert $\bar{x}$ und die Standardabweichung σ_{n-1} abfragen können.

4.3 Bestimmung von Länge l und Radius r_0 des Torsionsdrahtes.

4.4 Man berechne das Trägheitsmoment J_A des Probekörpers, sowie das Direktionsmoment D oder den Torsionsmodul G des Torsionsdrahtes.

5. Fragen

5.1 Nennen Sie die Eigenschaften des starren Körpers und des elastischen Körpers.

5.2 Die Bewegungsgleichung des Torsionsschwingers lautet $\ddot{\varphi} + \frac{D}{J_A}\varphi = 0$. Wie groß ist seine Frequenz?

5.3 Ein Stahldraht ($G = 8{,}14 \cdot 10^4\ \mathrm{N\,mm^{-2}}$) von 1 m Länge soll durch einen Messingdraht ($G = 4{,}12 \cdot 10^4\ \mathrm{N\,mm^{-2}}$) gleichen Durchmessers und gleichen Direktionsmomentes ersetzt werden. Welche Länge muss der Messingdraht haben?

5.4 Ein Stahldraht ($G = 8{,}14 \cdot 10^4\ \mathrm{N\,mm^{-2}}$) von 1 mm Durchmesser soll durch einen Messingdraht ($G = 4{,}12 \cdot 10^4\ \mathrm{N\,mm^{-2}}$) gleicher Länge und gleichen Direktionsmomentes ersetzt werden. Welchen Durchmesser muss der Messingdraht haben?

5.5 Geben Sie die Definitionsgleichung des Massenträgheitsmomentes J_A an (mit Skizze).

5.6 Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment J_S für einen Kreiszylinder bezüglich seiner Rotationsachse mit Hilfe seiner Definitionsgleichung.

5.7 Ein starrer Körper ($J_A = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg\,m^2}$) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 12\ \mathrm{s^{-1}}$ um eine feste Achse A . Wie groß ist seine Rotationsenergie?

5.8 Die Bewegungsgleichung des Torsionsschwingers lautet $\ddot{\varphi} + \frac{D}{J_A}\varphi = \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$. Zeigen Sie, dass $\varphi(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$ die Lösung der Bewegungsgleichung ist.

5.9 Welche Beziehungen bestehen zwischen Kreisfrequenz, Frequenz und Schwingungsdauer des Torsionsschwingers?

5.10 Leiten Sie für $J_A = J_{ZA}\frac{T^2}{T_Z^2 - T^2}$ eine Fehlerformel für den absoluten Fehler ΔJ_A her. Alle Größen sollen fehlerbehaftet sein.

Literatur

[1] Schenk/Kremer (Hrsg.) : Physikalisches Praktikum
Springer Spektrum, Heidelberg, Wiesbaden, 2014
ISBN : 978-3-658-00665-5

[2] Hering, E. u. a. : Physik für Ingenieure
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012
ISBN : 978-3-642-22568-0