Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig
Mathematisch-Naturwissenschaftliches Zentrum (MNZ)
Physikalisches Praktikum

Versuchsanleitung S 1 : Physikalisches Pendel

1 Einleitung

Die Pendelschwingung bietet die Möglichkeit, Massenträgheitsmomente beliebig geformter Körpers experimentell zu ermitteln.
Sie ist eine anharmonische Schwingung, die lediglich im Grenzfall kleiner Ausschläge näherungsweise als harmonische Schwingung aufgefasst werden kann. Für beide Fälle werden im Versuch die Lösungen der Schwingungsdifferentialgleichung experimentell überprüft.
Die Schwingungsdifferentialgleichung des physikalischen Pendels wird aus der Grundgleichung für die Rotation eines starren Körpers um eine raum- und körperfeste Drehachse entwickelt. Dabei finden die Größen Drehmoment, Massenträgheitsmoment und Winkelbeschleunigung Anwendung.

2 Grundlagen

Ein physikalisches Pendel ist ein starrer Körper, der sich im homogenen Schwerefeld befindet und eine raum- und körperfeste Drehachse besitzt, die nicht durch den Körperschwerpunkt verläuft.
Im Folgenden wird von einer horizontalen Drehachse ausgegangen. Die Gleichgewichtslage des Pendels ist dadurch gekennzeichnet, dass der Körperschwerpunkt S senkrecht unterhalb der Drehachse A liegt. Mit der an der Lagerung der Drehachse angreifenden Stützkraft (Auflagerkraft) und dem Stützmoment sind in der Gleichgewichtslage die Summen aller am starren Körper (Pendel) angreifenden Kräfte und aller Drehmomente für sich gleich Null. Bei einer Störung des Gleichgewichtes wird ein rücktreibendes Drehmoment hervorgerufen und das sich selbst überlassene Pendel vollführt eine Schwingung um seine Gleichgewichtslage.
Zur Beschreibung der Bewegung verwendet man als Koordinate vorteilhaft den Winkel φ (siehe Bild 1).

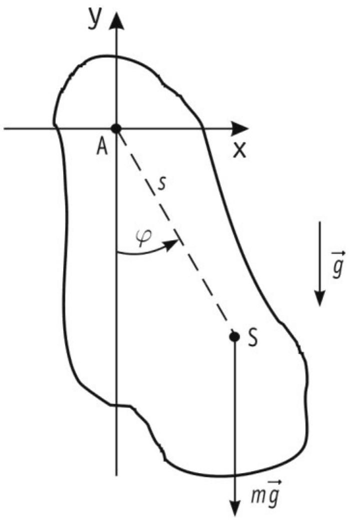

Bild 1 Physikalisches Pendel (ausgelenkt)

Die Pendelschwingung erfüllt die Grundgleichung

$$J_A\,\ddot{\vec{\varphi}}(t) = \vec{M}_A \qquad (2-1)$$

für die Rotation des starren Körpers um eine raum- und körperfeste Drehachse. In (2 - 1) bedeuten $\vec{M}_A$ das auf die Achse A bezogene Drehmoment der am Pendel angreifenden Kräfte und

$$J_{\mathrm{A}} = \int_{\mathrm{K}} r^2 \, \mathrm{d}m \tag{2 – 2}$$

das Massenträgheitsmoment des Pendelkörpers K bezüglich der Drehachse A . Nach Bild 1 gilt für das Drehmoment $\vec{M}_{\mathrm{A}}$ der Gewichtskraft $m\vec{g}$ bezüglich der in z - Richtung orientierten Achse A

$$M_{\mathrm{Az}} = -m\,g\,s\,\sin\varphi \quad , \tag{2 – 3}$$

wobei das negative Vorzeichen in (2 – 3) den rücktreibenden Charakter berücksichtigt.
Mit (2 – 3) folgt aus (2 – 1)

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgs}{J_{\mathrm{A}}} \sin\varphi = 0 \quad . \tag{2 – 4}$$

Die Gleichung (2 - 4) ist die Bewegungsgleichung des ungedämpften Pendels, eine nichtlineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Sinusfunktion im zweiten Summanden hat zur Folge, dass ihre Lösung und damit die Bestimmung der Schwingungsdauer T wesentlich komplizierter ist als bei einer harmonischen Schwingung, deren Kreisfrequenz ihrer Bewegungsgleichung direkt entnommen werden kann.
Die Situation vereinfacht sich aber dann, wenn man sich bei der Schwingung eines Pendels auf so kleine Amplituden beschränkt, dass in hinreichender Näherung der Sinus des Auslenkwinkels durch den Winkel (im Bogenmaß) selbst ersetzt werden kann

$$\sin\varphi \approx \varphi \quad . \tag{2 – 5}$$

Für infinitesimal kleine Auslenkungswinkel und Schwingungsamplituden gilt $\sin\varphi = \varphi$ und damit geht Gleichung (2 - 4) in eine lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung über, wie sie vom harmonischen Oszillator bekannt ist

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgs}{J_{\mathrm{A}}} \varphi = \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad . \tag{2 – 6}$$

Ihre allgemeine Lösung lautet $\varphi(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$. Dabei sind die Kreisfrequenz ω_0 und die Schwingungsdauer T direkt aus der Bewegungsgleichung (2 - 6) zu entnehmen

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\mathrm{A}}}{mgs}} \quad . \tag{2 – 7}$$

In der Realität haben die Schwingungen eines physikalischen Pendels nie infinitesimale sondern immer endliche Amplituden. Die Gültigkeit der Näherungslösung (2 - 7) wird bei Vergrößerung der Amplitude immer schlechter und die Schwingung anharmonisch. Insbesondere für nicht mehr kleine Schwingungsamplituden φ_0 muss deshalb zur Berechnung der exakten Schwingungsdauer T' die vollständige Differentialgleichung (2 – 4) gelöst werden. Dies ist elementar nicht möglich sondern nur mittels der Theorie elliptischer Integrale. Damit erhält man für die exakte Schwingungsdauer

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\mathrm{A}}}{mgs}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \ldots \right] = T \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k}^2 \sin^{2k} \frac{\varphi_0}{2} \quad . \tag{2 – 8}$$

Die Schwingungsdauer des anharmonischen Oszillators ist also auch von der Amplitude φ_0 abhängig. Für kleine Amplituden φ_{01} $\left(\text{also für } \sin^2 \frac{\varphi_{01}}{2} \ll \right)$ ist die Summe in (2 – 8) näherungsweise gleich eins, für große Amplituden φ_{02} ist sie jedoch signifikant größer eins, weil für diese auch die in der eckigen Klammer auf eins folgenden, von der Amplitude abhängigen Summanden, noch Beiträge zu T' in messbaren Größenordnungen liefern. Die Schwingungsdauern T' (für große Amplituden φ_{02}) und T (für kleine Amplituden φ_{01}) unterscheiden sich also. Ihre relative Differenz berechnet sich nach

$$x=\frac{T'-T}{T}=\frac{T\left[1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_{02}}{2}+\frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi_{02}}{2}+\ldots\right]}{T}=\frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_{02}}{2}+\frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi_{02}}{2}+\ldots \qquad (2-9)$$

und hängt somit ausschließlich von der (großen) Schwingungsamplitude φ_{02} ab.
Beispielsweise berechnet man nach Gl. (2 – 9) mit $\varphi_{02}=30°$ den Wert $x=0{,}0174$. Also unterscheiden sich in diesem Fall T' und T um 1,74 % ., d.h., die Schwingungsdauer T' der Schwingung mit 30° Amplitude ist um 1,74 % größer als die Schwingungsdauer T der Schwingung mit kleiner Amplitude.

3 Versuchsanordnung

Als Pendelkörper dienen Vielecke aus Aluminiumblech. Die Lage des Schwerpunktes ist markiert. Die Aufhängungen der Pendel sind kugelgelagert. Die Messung der Schwingungsdauern erfolgt mittels Lichtschranke und einem daran angeschlossenen elektronischen Zähler mit einer relativ hohen Anzeigegenauigkeit von 0,0001 s. Das ist notwendig, um die kleine Zeitdifferenz zwischen T' und T auflösen zu können.
Da mit der Versuchsanordnung technisch bedingt nicht beliebig kleine Schwingungsamplituden untersucht werden können, erfolgen die Messungen für die kleinen Schwingungsamplituden bei Aufgabe 4.2 mit Amplituden von $\varphi_{01}=5°$. Bei dieser kleinen Amplitude ist die nach der Näherungsformel (2 - 7) berechnete und bei der Aufgabe 4.3 zur Auswertung verwendete Schwingungsdauer T lediglich 0,05 % kleiner als die nach der exakten Formel (2 – 8) für diesen kleinen Amplitudenwinkel berechnete Schwingungsdauer T' . Deshalb soll im vorliegenden Versuch eine Amplitude von 5° als hinreichend klein angesehen werden für die Anwendbarkeit von Gleichung (2 - 7) .
Vor einer Messung lasse man das Pendel stets einschwingen und achte bei Aufgabe 4.5 insbesondere auf das bestmögliche Einhalten von $\varphi_{02}=30°$.

4 Aufgaben

In diesem Abschnitt werden die zu bearbeitenden Aufgaben nur grundsätzlich aufgeführt.
Genauere Hinweise zur Versuchsdurchführung befinden sich am Arbeitsplatz.

4.1 Messen Sie für das gegebene Pendel die Abstände s_i der beiden Drehachsen vom Schwerpunkt und stellen Sie die Masse m des Pendelkörpers durch Wägung fest.

4.2 Messen Sie die Schwingungsdauern des physikalischen Pendels für die beiden Drehachsen bei kleinen Amplituden $\varphi_{01}=5°$.

Hinweis : Bitte schauen Sie zur Vorbereitung auf den Versuch unbedingt in der Bedienungsanleitung Ihres Taschenrechners nach, wie Sie unter Benutzung der in den Taschenrechner integrierten Statistikfunktionen zu einer Anzahl von Messwerten x_1 , x_2 , … , x_n den Mittelwert $\bar{x}$ und die Standardabweichung σ_{n-1} abfragen können.

4.3 Berechnen Sie mit den Messergebnissen von 4.1 und 4.2 die Massenträgheitsmomente J_{Ai} für die beiden Drehachsen nach (2 – 7) .

4.4 Berechnen Sie mit den Ergebnissen aus 4.1 , 4.2 und 4.3 das Massenträgheitsmoment J_S des Pendels bezüglich der zu den beiden Drehachsen parallelen Schwerpunktachse S .

4.5 Um die Differentialgleichung (2 – 4) einfach lösbar zu machen, wurde die Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$ gemäß Gleichung (2 – 5) verwendet. Damit lässt sich dann der Zusammenhang zwischen der Schwingungsdauer T und dem Massenträgheitsmoment J_A nach Gleichung (2 – 7) berechnen. Diese Näherung (2 – 5) gilt nur für kleine Amplituden und führt mit zunehmender Amplitude zu immer größeren Abweichungen, die zu einem systematischen Fehler des berechneten Wertes von J_A führen. Um die Unsicherheit des Ergebnisses nicht zu vergrößern, muss die Amplitude der Schwingungen folglich so klein gehalten werden, dass die relative Abweichung der bei großer und kleiner Amplitude gemessenen Schwingungsdauern T' und T kleiner bleibt als der relative Fehler der Schwingungsdauer $\frac{\Delta T}{T}$. Im Folgenden soll geklärt werden, ob dies bei einer so großen Winkelamplitude wie $\varphi_{02}=30°$ noch der Fall ist. Messen Sie dazu die Schwingungsdauer T' des Pendels für die gelbe Drehachse bei dieser (großen) Amplitude. Berechnen Sie unter Verwendung der für die gleiche Drehachse in 4.2 gemessenen Schwingungsdauer T den Ausdruck $x = \frac{T' - T}{T}$ für die relative Abweichung der Schwingungsdauern bei großer bzw. kleiner Amplitude. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem relativen Fehler der Schwingungsdauer $\frac{\Delta T}{T}$ und entscheiden Sie, ob eine Variation der Schwingungsamplituden innerhalb des Winkelbereichs bis 30° das Ergebnis für das Massenträgheitsmoment J_A verschlechtern würde.

<u>Zusatzaufgabe</u>: Berechnen Sie aus dem für $x = \frac{T' - T}{T}$ erhaltenen Wert die nach (2 – 9) zu diesem Wert führende Schwingungsamplitude φ_{02}. Betrachten Sie dazu Gleichung (2 – 9) als quadratische Gleichung $C = B \cdot z + A \cdot z^2$ worin $C = x = \frac{T' - T}{T}$, $B = \frac{1}{4}$, $A = \frac{9}{64}$ und $z = \sin^2 \frac{\varphi_{02}}{2}$ zu setzen sind. Aus der nicht negativen Lösung z dieser quadratischen Gleichung erhält man mit $\varphi_{02} = 2 \cdot \arcsin\sqrt{z}$ die zu $\frac{T' - T}{T}$ gesuchte Schwingungsamplitude φ_{02}.

5. Fragen

5.1 Erläutern Sie die Begriffe "Mathematisches Pendel" und "Physikalisches Pendel".

5.2 Erläutern Sie den STEINERschen Satz für Massenträgheitsmomente (Formel und Skizze).

5.3 Geben Sie die Formel für die Schwingungsdauer des physikalischen Pendels an und leiten Sie daraus die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels her.

5.4 Wie berechnet man das Drehmoment $\vec{M}$ der Schwerkraft $\vec{F}_g$ eines starren Körpers bezüglich einer festen, horizontalen Achse A, die nicht durch den Schwerpunkt verläuft?

5.5 Schreiben Sie die Bewegungsgleichung des ungedämpften, freien physikalischen Pendels auf und erläutern Sie alle in ihr vertretenen Größen.

5.6 Leiten Sie eine Berechnungsformel her für das Massenträgheitsmoment eines dünnen, homogenen Stabes (Länge l, Masse m) bezüglich einer senkrecht zur Stabachse durch das Stabende verlaufenden Rotationsachse. Benutzen Sie zur Herleitung nicht den STEINERschen Satz sondern die Definitionsgleichung (2 – 2) für das Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers.

5.7 Geben Sie den Ortsvektor des Schwerpunktes an, jeweils für a) ein starres Punktmassensystem und b) einen starren Körper mit stetiger Raumerfüllung an (Formeln und Skizzen).

5.8 Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$ die Lösung $\varphi(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$ besitzt.

5.9 Geben Sie das Massenträgheitsmoment bezüglich einer Achse A an, jeweils für a) ein Punktmassensystem und b) einen starren Körper mit stetiger Raumerfüllung an (Formeln und Skizzen).

5.10 Zwei gleiche Punktmassen ($m_1 = m_2 = M$) befinden sich auf einer masselosen Stange in Abständen l und $2l$ von der Drehachse. Skizzieren Sie eine solche idealisierte Messanordnung und berechnen Sie die Schwingungsdauer der Anordnung für den Fall kleiner Auslenkungen und $l = 1$ m .

Literatur

[1] Schenk/Kremer (Hrsg.) : Physikalisches Praktikum
Springer Spektrum, Heidelberg, Wiesbaden, 2014 (14. Auflage)
ISBN : 978-3-658-00665-5 (Softcover) / 978-3-658-00666-2 (eBook)

[2] Hering, E. u.a. : Physik für Ingenieure
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2021 (13. Auflage)
ISBN : 978-3-662-63176-8 (Hardcover) / 978-3-662-63177-5 (eBook)