FEHLERBETRACHTUNG

1 Einleitung

Alle in physikalischen Experimenten gewonnenen Messwerte besitzen prinzipiell eine gewisse Ungenauigkeit (eine sog. 'Messunsicherheit'), die wir im Folgenden als 'Fehler' bezeichnen wollen. 'Fehler' meint hier aber nicht, dass der Experimentator etwas falsch gemessen hat, sondern es geht darum, dass Messwerte nicht beliebig genau erfasst werden können. Eine Fehlerbetrachtung (oder man spricht auch von Fehlerrechnung) hat also stets zum Ziel, eine Abschätzung hinsichtlich der Genauigkeit eines Messwertes bzw. eines Rechenergebnisses vorzunehmen.

Kann zu einem Messwert/Rechenergebnis x ein Fehler angegeben oder berechnet werden, dann gibt man meist das Ergebnis in der Form $x \pm \Delta x$ an. Darin ist Δx der zu x gehörende (absolute) Fehler. Der in dieser Schreibweise vorkommende Operator $\pm$ gehört weder zum Wert x noch zum Fehler Δx, sondern er verknüpft nur den Wert x einer Größe mit derem Fehler Δx. Die Ergebnisangabe in der Form $x \pm \Delta x$ erlaubt die Berechnung einer unteren und einer oberen Grenze eines sogenannten 'Vertrauensbereiches'. Dies bedeutet, dass der 'wahre' Wert der zu bestimmenden Größe (mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit) im Intervall $[\, x - \Delta x \;,\; x + \Delta x \,]$ zu finden ist.

Wichtig !

1) Fehler sind stets positive Größen, d.h. es ist immer $\Delta x > 0$.
2) Die Größe x und ihr zugehöriger Fehler Δx sind im Ergebnis stets mit der gleichen Einheit anzugeben.
3) Fehler dürfen im Ergebnis nur mit wenigen Ziffern angegeben werden, müssen also i.d.R. gerundet werden.
   Grund: Fehler können immer nur 'abgeschätzt' werden, selbst dann, wenn sie nach mitunter komplizierten Formeln zu berechnen sind, wie z.B. in Folge einer Fehlerfortpflanzung (siehe Pkt. 3).

Ein Messergebnis kann auch unter Verwendung eines relativen Fehlers angegeben werden. Unter dem relativen Fehler versteht man den Quotienten $\frac{\Delta x}{|x|}$, also das Verhältnis von absolutem Fehler zum Betrag der Größe. Die einheitenlose Dezimalzahl des nach obiger Formel berechneten relativen Fehlers nimmt stets nur positive Werte zwischen 0 und 1 an, wenn man sinnvollerweise davon ausgeht, dass der Wert (Betrag) einer Größe x stets größer sein sollte als der zugehörige Fehler Δx . Oft gibt man den relativen Fehler in Prozent an, dabei gilt $1 \triangleq 100\ \%$.

Beispiel: Angabe des Ergebnisses einer Längenmessung:

$l = 200\ \text{mm} \pm 1\ \text{mm}$

oder $l = (200 \pm 1)\ \text{mm}$

oder $l = 200\ \text{mm} \pm 0{,}5\ \%$ (Nebenrechnung: $\frac{1\,\text{mm}}{200\,\text{mm}} = 0{,}005 \triangleq 0{,}5\ \%$)

Der Fehler eines Messwertes hängt ist erster Linie vom verwendeten Messgerät ab. Bei analogen Messgeräten, z.B. einem Zeigerinstrument oder der Skala eines Lineals, ist es sinnvoll und darum üblich, die Messunsicherheit (Ableseungenauigkeit) eines einzelnen abgelesenen Messwertes mit einem halben Skalenteil anzugeben.

Unter dem Skalenteil (auch Skalenteilungswert genannt) versteht man die Differenz zwischen den Werten, die zu zwei aufeinander folgenden Teilstrichen gehören. Der Skalenteil wird in derselben Einheit angegeben wie die an der Skala ablesbaren Messwerte.

Bei einer Längenmessung mit dem Lineal, Gliedermessstab (Zollstock), Bandmaß o.ä. muss man aber beachten, dass jede einzelne Längenmessung durch jeweils zwei Ablesungen zustande kommt, also z.B. oben und unten, links

und rechts oder vorn und hinten. Das Ergebnis einer solchen Längenmessung gibt man letztlich stets als Differenz der beiden Ablesungen an. Deswegen weist die aus den beiden (fehlerbehafteten) Ablesungen als Differenz berechnete Länge ebenfalls einen Fehler (also eine Ungenauigkeit) auf. Wie man mit der Theorie der Fehlerfortpflanzung (s. Seite 5) zeigen kann, addieren sich bei dieser Art der Längenmessung die Fehler der beiden Ablesungen und die zu bestimmende Länge hat darum einen Fehler von zwei mal einem halben Skalenteil und somit also genau einem ganzen Skalenteil.

Beispiele:

- Ein Schullineal besitzt ein mm-Skala. Jede damit gemessene Länge weist demnach einen Messfehler von 1 mm auf.
- Mit einem Bandmaß, welches eine cm-Teilung besitzt, können Längen also auch nur auf 1 cm genau bestimmt werden.
- Bei der Längenmessung mit einem analogen Messschieber hängt die Genauigkeit von der Skalenteilung des verwendeten Messschiebers ab. Weil das Messgut am feststehenden Messschenkel des Messschiebers anliegt und die Ablesung deshalb nicht an zwei Stellen sondern nur an einer Stelle - nämlich am beweglichen Messschenkel - erfolgt, beträgt die Messunsicherheit bei der Messung mit einem analogen Messschieber ein halbes Skalenteil.

An einem Messgerät mit einer Digitalanzeige macht man normalerweise keinen Ablesefehler. Trotzdem ist auch das Messergebnis eines Digitalmessgerätes fehlerbehaftet. Eine Angabe zu dem für ein solches Gerät zu erwartenden Messfehler muss man i.d.R. dem Datenblatt des Messgerätes entnehmen oder beim Gerätehersteller erfragen.

2 Fehler gemessener Größen

Den Fehler einer unmittelbar gemessenen Größe berechnet man wie nachfolgend angegeben:

- Einzelmessung : $\Delta x = \frac{1}{2}$ Skalenwert pro Ablesung
- Messreihe $(n < 10)$: $\Delta x = \frac{1}{2} \cdot$ Spannweite der Messreihe mit Spannweite $= x_{max} - x_{min}$
  (n ist hier der Umfang der Messreihe, also die Anzahl der zur Messreihe gehörenden Messwerte)
- Messreihe $(n \geq 10)$: $\Delta x = 2 \cdot \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$ mit σ_{n-1} : Standardabweichung der Messreihe

  Die Standardabweichung σ_{n-1} einer Messreihe wird entweder mit einem Taschenrechner (meist im 'Statistik'-Modus) oder mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms berechnet.

3 Fehler berechneter Größen (Fehlerfortpflanzung)

Meist werden unmittelbar gemessene, mit Messunsicherheiten behaftete Größen x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_n verwendet, um aus ihnen eine mittelbare (also eine nur berechenbare und nicht unmittelbar messbare) Größe y zu ermitteln. Dann ist also y eine Funktion der Teilmessgrößen x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_n . Diese Funktion $y = y(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ sei bekannt und die in dieser Funktion auftretenden unmittelbaren Messgrößen liegen mit ihren Werten und den zugehörigen Fehlerangaben in der Form $x_i \pm \Delta x_i$ vor.

Die Fehler (Messunsicherheiten) der Eingangsgrößen verursachen einen Fehler (also eine Ungenauigkeit) der aus den Eingangsgrößen zu berechnenden Größe y, weswegen man hier von einer Fehlerfortpflanzung spricht.
Es ist außerdem logisch, dass der Fehler Δy der mittelbaren Größe y um so größer sein muss, je ungenauer die Eingangsgrößen vorliegen, d.h., die Zunahme eines beliebigen Δx_i muss zu einer Vergrößerung von Δy führen.

Die Berechnung des Fehlers der Größe y erfolgt nach Formel für das "Totale Differential":

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \qquad \text{mit} \quad \frac{\partial y}{\partial x_i} : \text{ Partielle Ableitung von } y \text{ nach } x_i$$

Die Anwendung dieses Formalismus liefert für einige einfache mathematische Funktionen $z = z(x, y)$
die nachfolgend genannten Fehlerformeln zur Berechnung von Δz:

Zwei Messgrößen :	$x \pm \Delta x$,	$y \pm \Delta y$
Summe :	$z = x + y$,	$\Delta z = \Delta x + \Delta y$
Differenz :	$z = x - y$,	$\Delta z = \Delta x + \Delta y$
Produkt :	$z = x \cdot y$,	$\Delta z = y\,\Delta x + x\,\Delta y$

Kehrwert :	$z = \frac{1}{x}$,	$\Delta z = \frac{\Delta x}{x^2}$
Quotient :	$z = \frac{x}{y}$,	$\Delta z = \frac{\Delta x}{y} + \frac{x\,\Delta y}{y^2}$

4 Runden

Messwerte sind immer nur so genau anzugeben (also mit nur so vielen gültigen Ziffern), wie es die zugehörige Messunsicherheit zulässt. Darum ist meist eine Rundung erforderlich. Zuerst rundet man den Fehler (siehe Pkt. 4.1) und anschließend den zugehörigen Mess- oder Rechenwert (siehe Pkt. 4.2).

4.1 Runden des Fehlers

Der **Fehler ist immer aufzurunden**. Die **Rundung** sowohl **von** absoluten wie auch von relativen **Fehlerangaben** erfolgt **generell auf eine Ziffer**. Nur in dem Ausnahmefall, wenn die Ziffernfolge des anzugebenden (absoluten oder relativen) Fehlers mit einer "1" beginnt, ist es zulässig, diese Fehlerangabe auf zwei Ziffern zu runden.

Beispiel : Runden des Fehlers

	berechnet		gerundet
• auf eine Ziffer:	0,381	→	0,4
	0,0835	→	0,09
	6,04	→	7
	82,1	→	$9 \cdot 10^1$ oder auch 90 (Die Null am Ende ist hier nicht signifikant !)
• auf zwei Ziffern:	1,03	→	1,1
	0,0924	→	0,10
	0,00162	→	0,0017
	935	→	$1{,}0 \cdot 10^3$ oder auch 1000 (Die letzten beiden Nullen sind hier nicht signifikant !)

4.2 Runden des Messwertes oder des Berechnungsergebnisses

Der **Messwert oder** das **Berechnungsergebnis wird auf** die **letzte Stelle des** zugehörigen gerundeten **Fehlers** auf- oder ab**gerundet.** D.h., im Ergebnis besitzen Wert und Fehler die gleiche Anzahl von Nachkommastellen !

Beispiel : Runden des Messwertes oder des Berechnungsergebnisses

ungerundet : Wert: 12,9446
Fehler: 0,0147

richtig	**falsch**	
12,945 ± 0,015	12,9446 ± 0,0147	zuviel Stellen (im Wert und im Fehler)
	12,945 ± 0,02	zuwenig Stellen (im Fehler)
	12,9 ± 0,02	" " (im Wert und im Fehler)
	12,94 ± 0,015	" " (im Wert)

Versuchsergebnisse sind immer sinnvoll gerundet anzugeben !

Dazu immer die folgende Bearbeitungsreihenfolge einhalten:

1) Fehler runden (dabei stets aufrunden - siehe Pkt. 4.1)
2) Anzahl der Nachkommastellen des gerundeten Fehlers ermitteln (also abzählen !)
3) Messwert bzw. Rechenergebnis auf die zu 2) ermittelte Anzahl von Nachkommastellen runden

5 Aussage des Messfehlers

Erst die Kenntnis des Fehlers (gleichbedeutend mit der Messunsicherheit) erlaubt Aussagen über :

5.1 Genauigkeit von Messungen oder Berechnungen

Ergebnis A : $F = (11{,}23 \pm 0{,}02)$ N
Ergebnis B : $F = (11{,}230 \pm 0{,}002)$ N

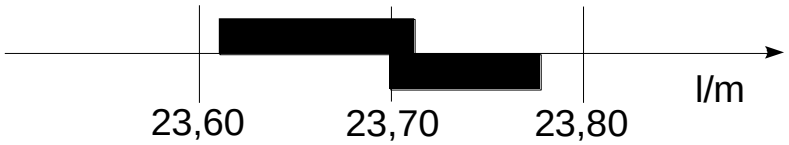
d. h. Ergebnis B ist zehnmal genauer als Ergebnis A

5.2 Vereinbarkeit von verschiedenen Ergebnissen (von denen man erwartet, sie sollten oder müssten gleich sein)

Ergebnisse sind vereinbar miteinander, wenn ihre Fehlerintervalle keinen leeren Durchschnitt aufweisen, d.h., wenn sich die Vertrauensbereiche der Ergebnisse (z.B. auf einem Zahlenstrahl dargestellt) überlappen.

- **vereinbar** :

  $(23{,}66 \pm 0{,}05)$ m und $(23{,}74 \pm 0{,}04)$ m



- **nicht vereinbar** :

  $(44{,}22 \pm 0{,}03)$ V und $(44{,}29 \pm 0{,}02)$ V

  In diesem Fall liegt ein Hinweis auf grobe und/oder nicht erfasste systematische Fehler vor ! Es sind deshalb weitere Untersuchungen und Analysen zum Auffinden von bisher unerkannten Fehlerquellen erforderlich !